Colle du 16/01 - Sujet 1
Matrices et analyse asymptotique

Question de cours.

1. Enoncer le développement limité à l'ordre 5 en 0 du sinus.
2. Démontrer la formule de Taylor-Young.

Exercice 1. Soit

$$f :]1;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer sa position par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (\alpha_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\alpha_{ij} = 1$ si $i \neq j$ et $\alpha_{ij} = 1 + a_i$ si $i = j$ où $a_1, \dots, a_n$ sont des réels fixés. Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Calculer ${}^tXAX$
2. En déduire que A est inversible.

Colle de mathématiques PTSI 2023-2024

Colle du 16/01 - Sujet 2
Matrices et analyse asymptotique

Question de cours.

1. Enoncer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de arctangente.
2. Démontrer le théorème de primitivation du développement limité.

Exercice 1. Soit $f : x \mapsto (\cos(x))^{1/x}$. Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f est prolongeable par continuité en 0, que ce prolongement est dérivable en 0 et déterminer la position de f par rapport à sa tangente.

Exercice 2. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2+y^2+z^2 = 1$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$. On pose également $P = I_3+M^2$ et $U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

1. Comparer P et $U{}^tU$.
2. En déduire P^2 et PM.
3. Déterminer les puissances de M.

Colle du 16/01 - Sujet 3
Matrices et analyse asymptotique

Question de cours.

1. Enoncer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
2. Démontrer de la formule de la trace du produit.

Exercice 1. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geqslant 2$, définie par $a_{i,i} = 0$, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et $a_{i,j} = 1$ pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $i \neq j$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
Indication : on pourra calculer $(A + I_n)^2$.

Exercice 2.

1. Démontrer que sh définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble que l'on précisera. On note f sa fonction réciproque.
2. Démontrer que f est $\mathscr{C}^4$.
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 de f.